

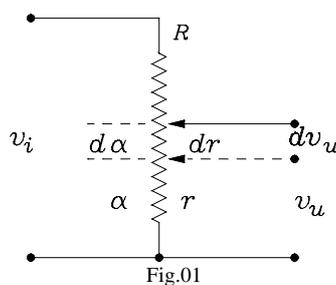
CALCOLO DI POTENZIOMETRI PARTICOLARI

Nella maggior parte dei casi, un potenziometro esplica la funzione del partitore lineare di tensione il cui rapporto tra ingresso e uscita è proporzionale percentualmente alla posizione angolare del perno di rotazione.

A volte, però, potrebbe essere necessario qualche altro tipo di variazione (ad es. quello logaritmico), perciò è importante determinare qual'è la **legge generale del potenziometro**.

La legge generale del potenziometro

Vogliamo, cioè, trovare come varia la resistenza per unità angolare del perno, in base alla legge di variazione della tensione d'uscita v_u che noi desideriamo e che è funzione della stessa unità angolare. Tutto quanto si dirà vale, ovviamente, anche per i potenziometri a cursore, dove, invece dell'angolo α s'intende lo spostamento lineare x . Osserviamo la Fig.01:



Indichiamo innanzi tutto con:

$$r = r(\alpha) \cdot l \quad (01)$$

la resistenza per unità d'angolo e con:

$$v_u = f(\alpha) \quad (02)$$

la funzione di variazione di v_u con l'angolo α . Ad una variazione dell'angolo α , la $r(\alpha)$ varia di:

$$dr = r(\alpha) \cdot d\alpha \quad (03)$$

La legge del partitore di tensione è, come già sappiamo:

$$v_u = \frac{v_i}{R} \cdot r(\alpha) \quad (04)$$

dove r è la parte di resistenza impegnata dal cursore e R è la resistenza totale del partitore. Differenziamo la (04), considerando che v_i e R sono grandezze costanti:

$$dv_u = \frac{v_i}{R} \cdot dr \quad (05)$$

Confrontiamo la (05) con la (03); otteniamo:

$$dv_u = \frac{v_i}{R} \cdot r(\alpha) \cdot d\alpha \quad (06)$$

Ma abbiamo anche detto che è $v_u = f(\alpha)$, quindi:

$$df(\alpha) = \frac{v_i}{R} \cdot r(\alpha) \cdot d\alpha \quad (07)$$

Derivando la (07) rispetto ad α si ottiene:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{v_i}{R} \cdot r(\alpha) \quad (08)$$

Risolviamo, finalmente, rispetto ad $r(\alpha)$ ed otteniamo **la legge fondamentale del potenziometro:**

$$r(\alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \quad (09)$$

dove R/v_i è una costante assegnata che dipende dal valore ohmico totale R del potenziometro e dalla d.d.p. v_i applicata. Possiamo, quindi, dire che, **se l'uscita dal potenziometro deve seguire una data funzione $f(\alpha)$ dipendente da α , la variazione della resistenza del potenziometro secondo α deve seguire la derivata della funzione $f(\alpha)$.**

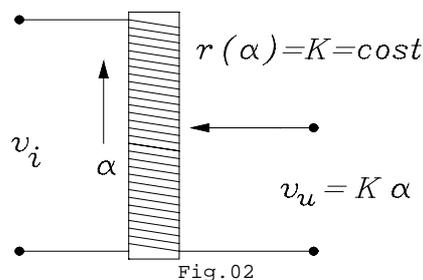
Esempi applicativi

Facciamo, ora, degli esempi applicativi, per comprendere meglio la **legge del potenziometro** espressa dalla formula (09) :

1° esempio: potenziometri lineari

E' il caso più semplice. Si impone che la tensione d'uscita v_u vari proporzionalmente con la rotazione del perno α , cioè che sia: $v_u = K \cdot \alpha$. Abbiamo:

$$r(\alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot \frac{d}{d\alpha} (K \cdot \alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot K \quad (10)$$

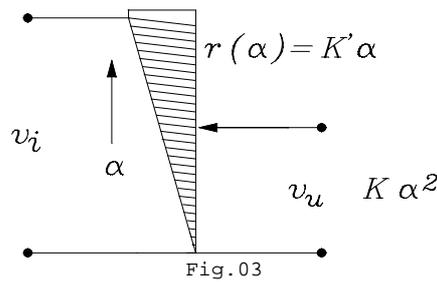


cioè la $r(\alpha)$ deve essere **costante** con α , (Fig.02), (Questa è la legge dei comuni **potenziometri lineari**). La figura fa intuire una possibile realizzazione: per esempio, si può avvolgere del filo di nichel-cromo su una striscia rettangolare di mica (magari tolta dalla "resistenza" di un vecchio ferro da stiro).

2° esempio: potenziometri quadratici

Per qualche arcano motivo si impone che la tensione d'uscita v_u vari con il quadrato di α , cioè che si abbia: $v_u = K \cdot \alpha^2$ (**potenziometri quadratici**). Abbiamo:

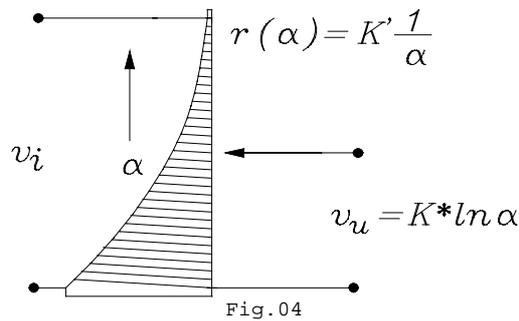
$$r(\alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot \frac{d}{d\alpha} (K\alpha^2) = \frac{2RK}{v_i} \cdot \alpha \tag{11}$$



In questo caso la $r(\alpha)$ deve **variare linearmente** con α (Fig.03). Una possibile realizzazione può essere quella di avvolgere del filo su un supporto isolante di forma triangolare, e su di esso fare scorrere un cursore.

3° esempio: potenziometri logaritmici

Imponiamo, ora, una variazione logaritmica di v_u con α , cioè vogliamo che sia: $v_u = K \cdot \lg \alpha$ (questo è il caso dei **potenziometri logaritmici**, usati principalmente per il controllo di volume negli apparati in B.F.)



$$r(\alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot \frac{d}{d\alpha} (K \cdot \ln \alpha) = \frac{RK}{v_i} \cdot \frac{1}{\alpha} \tag{12}$$

cioè la $r(\alpha)$ deve **variare in modo inverso con α** , come in Fig.04.

4° esempio: potenziometri sinusoidali

Facciamo un ultimo esempio, molto interessante. Imponiamo che la tensione v_u in uscita vari secondo il seno dell'angolo α , ossia che si abbia:

$$v_u = K \cdot \sin(\alpha)$$

L'applicazione di questa legge darà luogo alla costruzione dei **potenziometri sinusoidali**.

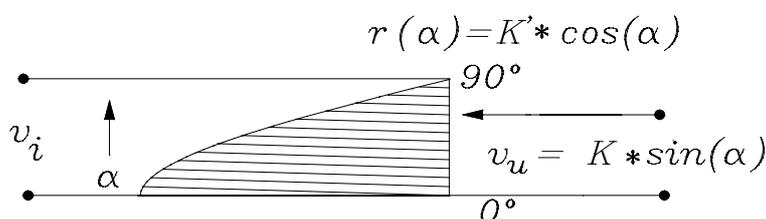
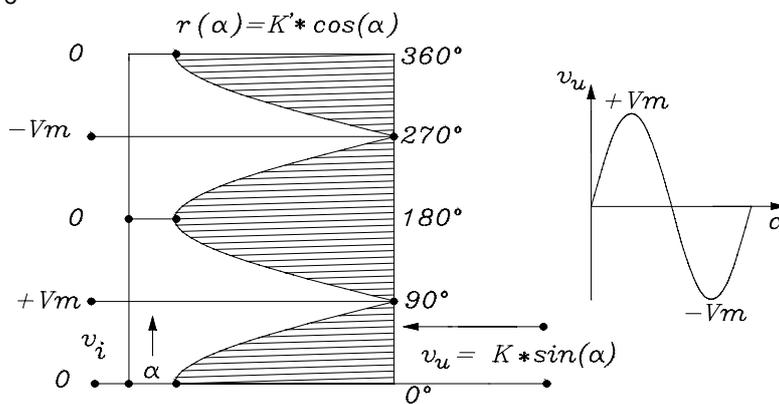


Fig.05

Per la (09) la variazione di $r(\alpha)$ dovrà essere cosinusoidale con α ; infatti:

$$r(\alpha) = \frac{R}{v_i} \cdot \frac{d}{d\alpha} (K \cdot \sin \alpha) = \frac{RK}{v_i} \cdot \cos \alpha \quad (13)$$

La Fig.0.5 mostra la soluzione pratica del problema su un solo quadrante. Con qualche artificio si può produrre una variazione su gli interi 360°



La Fig.05a mostra una possibile soluzione per l'intero periodo. Come si può notare, vi è la necessità di avere un'alimentazione duale, in cui i due valori di tensione devono essere il più possibile uguali in valore assoluto per non creare squilibri sull'uscita sinusoidale.

Si potrebbe chiudere su se stessa la resistenza sagomata cosinusoidamente unendo il punto 0° con il punto 360° e fornendo il sistema di un cursore rotante a velocità angolare costante per avere un generatore di tensione sinusoidale!

Si può proseguire con gli esempi, ma ormai il procedimento è chiaro.

Possiamo costruire, con più o meno facilità, qualsiasi potenziometro che abbia una risposta particolare al variare della posizione del perno: **è essenziale solo che la risposta segua una legge matematica che ammetta la derivata prima.**

In laboratorio sono stati costruiti quasi tutti i potenziometri che abbiamo ora considerato, avvolgendo, con un po' di attenzione, del sottile filo di Nichel-Cromo su foglietti di mica ritagliati secondo la legge prevista (i foglietti di mica sono stati prelevati dalla "resistenza" di un vecchio ferro da stiro, come già accennato). Uno scorrevole a cursore sul filo ci ha fornito praticamente la legge della tensione d'uscita in funzione dello spostamento.

L'esperienza, anche se è stata un po' complicata e delicata dal lato realizzativo e ha richiesto molta pazienza per evitare cortocircuiti tra le spire, che devono essere, ovviamente, molto serrate per avere un sufficiente "potere risolutivo", è risultata alla fine molto interessante per la conoscenza di questo particolare elemento di circuito, specialmente dal punto di vista didattico.

Avvertenza importante

Ed ora un'avvertenza fondamentale. Le leggi dei quattro circuiti che abbiamo esaminato, insieme a tutte le altre degli altri tipi di potenziometri non costruiti, sono **valide solo teoricamente**. Infatti, quando siamo costretti ad impiegare detti potenziometri dobbiamo ricordare che essi sono stati studiati sia pensando a un generatore di tensione costante e quindi **ideale**, sia tenendo conto della condizione di uscita a vuoto ovvero su **carico nullo** (resistenza infinita).

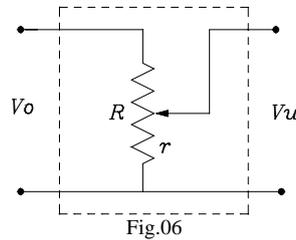
Nella realtà queste due condizioni non si verificano mai.

Facciamo un piccolo controllo su quanto or ora asserito.

IL POTENZIOMETRO REALE

Studiamo il più semplice dei quadripoli attenuatori, che è il **Potenziometro Lineare**, per verificare fino a che punto la sua legge teorica sia valida nella realtà applicativa.

Questo potenziometro è costituito semplicemente da una resistenza R su cui scorre un contatto strisciante che trasferisce in uscita una frazione r della resistenza R stessa (Fig.06).



Conosciamo già la "**legge del Potenziometro**" (09) che nel nostro caso riguarda il potenziometro lineare, ossia la relazione che esiste tra la tensione in uscita e quella in ingresso quando si tengono nel giusto conto i parametri resistivi in gioco. Sia V_0 la tensione di segnale all'ingresso e V_u quella all'uscita.

Qui la nota legge del Partitore lineare di Fig.06 fornisce:

$$V_u = V_0 \cdot \frac{r}{R}$$

che già conosciamo. Se V_0 e R sono costanti, possiamo meglio scrivere così:

$$V_u = \frac{V_0}{R} \cdot r = K \cdot r \quad (14)$$

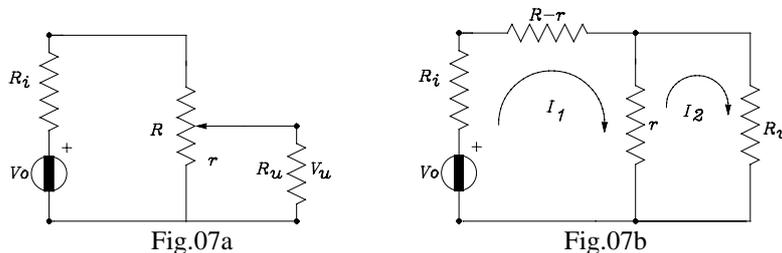
Dalla (14) si deduce che la tensione d'uscita V_u è proporzionale alla frazione r di K .

Questa legge di proporzionalità, già nota, è però vera solo se si verificano le seguenti due condizioni, molto teoriche:

- 1) il segnale V_0 proviene da un generatore ideale con resistenza interna $R_i = 0$;
- 2) l'utilizzatore su cui grava la tensione d'uscita V_u non deve caricare il circuito e quindi deve avere una resistenza $R_u = \infty$.

Queste due condizioni, purtroppo, sono molto lontane dalla realtà. Infatti, la R_i non è uguale a zero e la R_u non è infinita.

Vediamo allora come la legge lineare di variazione (14) su scritta risulta modificata da queste due condizioni perturbatrici. Teniamo conto di ciò nella Fig.07a, dove sono presenti tutti i parametri in gioco.



Facciamo, d'ora in poi, riferimento alla Fig.07b che mostra il circuito di Fig.07a disegnato in altro modo con tutti i componenti bene e più chiaramente espressi, per essere meglio risolto mediante le equazioni di Kirchhoff alle maglie. Tenendo presente che R_i, R_u e R sono costanti, si può scrivere il sistema alle maglie del circuito, formato dalle seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} V_0 = [R_i + (R - r) + r] \cdot I_1 - r \cdot I_2 \\ 0 = -r \cdot I_1 + (r + R_u) \cdot I_2 \end{cases} \quad (15)$$

Risolviamo la seconda equazione rispetto a I_1 :

$$I_1 = \left(\frac{r + R_u}{r} \right) \cdot I_2 \tag{16}$$

Sostituiamo la (16) nella prima delle (15), in modo da avere un'equazione con la sola incognita I_2 dipendente da r . Ricordando che $V_u = R_u \cdot I_2$, si perviene alla seguente espressione:

$$V_u = R_u \cdot V_0 \cdot \frac{r}{-r^2 + (R_i + R) \cdot r + (R_i \cdot R_u + R \cdot R_u)} \tag{17}$$

nella quale si può notare la presenza nel denominatore di un termine quadratico quale elemento perturbatore della linearità del quadripolo potenziometrico.

Approfondimento Matematico

Giustificiamo l'espressione (17).

Sostituiamo nella prima equazione la I_1 con la (16) e otteniamo:

$$V_0 = [R_i + (R - r) + r] \cdot \left(\frac{r + R_u}{r} \right) \cdot I_2 - r \cdot I_2 ; \tag{18}$$

da cui, a seguire:

$$\begin{aligned} r \cdot V_0 &= [R_i + (R - r) + r] \cdot (r + R_u) \cdot I_2 - r^2 \cdot I_2 ; \\ r \cdot V_0 &= [R_i \cdot (r + R_u) + (R - r) \cdot (r + R_u) + r \cdot (r + R_u) - r^2] \cdot I_2 \\ r \cdot V_0 &= (R_i \cdot r + R_i \cdot R_u + R \cdot r + R \cdot R_u - r^2) \cdot I_2 \\ I_2 &= V_0 \cdot \frac{r}{-r^2 + (R_i + R) \cdot r + (R_i \cdot R_u + R \cdot R_u)} ; \end{aligned} \tag{19}$$

Ricordando che $V_u = R_u \cdot I_2$, si perviene al risultato finale (17).

Per una verifica dell'esattezza del calcolo sviluppato, dividiamo il numeratore e il denominatore per R_u . Otteniamo l'espressione:

$$V_u = V_0 \cdot \frac{r}{\frac{-r^2}{R_u} + \frac{R_i + R}{R_u} \cdot r + R_i + R} ; \tag{20}$$

Se poniamo in essa le condizioni teoriche $R_i = 0$ e $R_u = \infty$ abbiamo:

$$V_u = \frac{V_0}{R} \cdot r ; \tag{21}$$

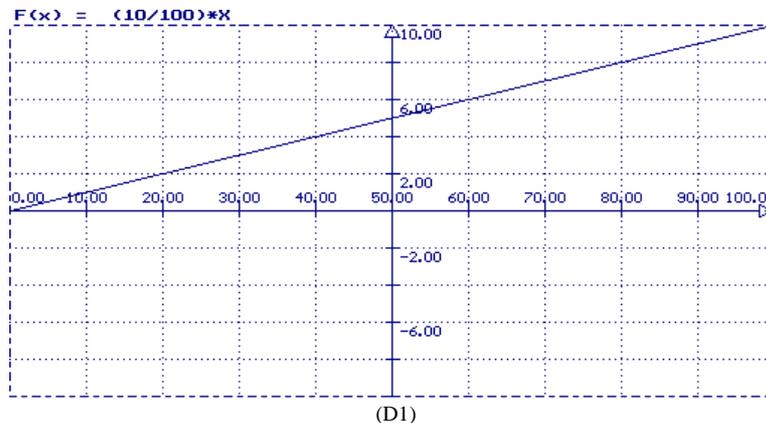
ossia l'espressione (1) del partitore teorico.

-----*-----

Facciamo un'applicazione simulata della relazione 17 (da cui otterremo dei grafici significativi):

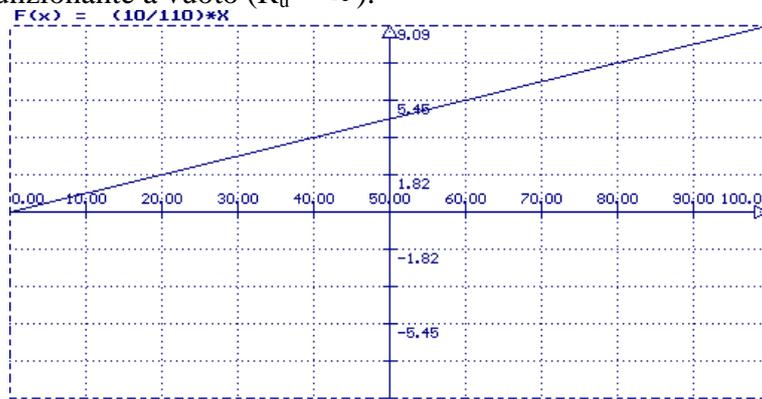
Consideriamo, come esempio, il quadripolo attenuatore reale di Fig.07a con $V_0 = 10V$, $R = 100\text{ohm}$, $R_i = 10\text{ohm}$ e determiniamo l'andamento della tensione d'uscita V_u al variare di r da 0 a 100 ohm e per diversi valori del carico R_u . Per semplicità diamo al carico questi soli tre valori:

- $R_u = \infty$ ohm (ideale),**
- $R_u = 100\text{ohm}$,**
- $R_u = 10\text{ohm}$.**



Il primo diagramma (D1), *preso come riferimento*, è relativo al **caso del potenziometro ideale** in cui $R_i = 0$ e $R_u = \infty$.

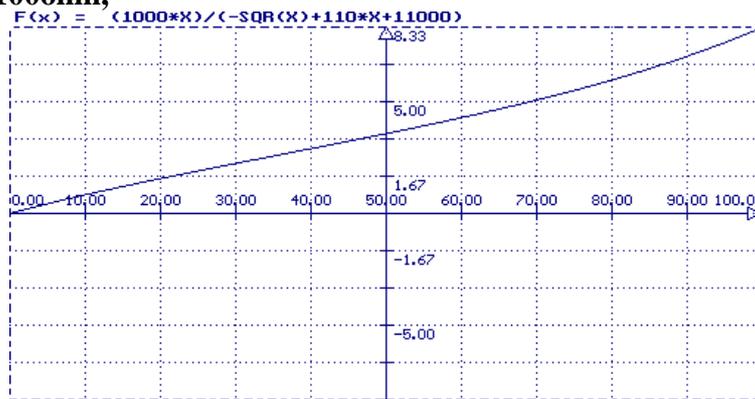
Il secondo diagramma (D1a) tiene conto della resistenza interna $R_i = 10\Omega$ del generatore, ma il partitore è ancora funzionante a vuoto ($R_u = \infty$).



(D1a)

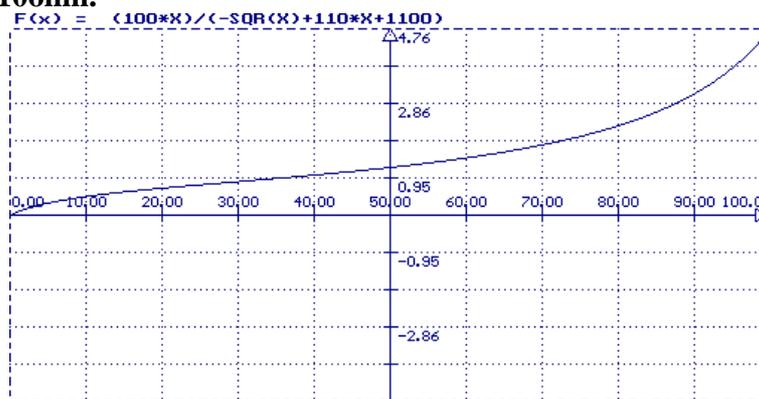
In queste condizioni la linearità è ancora assicurata, ma la tensione V_0 a disposizione diminuisce (nel nostro caso scende da 10V a 9,09V). Vediamo, adesso, in che modo e di quanto si allontana la risposta dal caso teorico al variare del carico R_u .

1) Caso: **$R_u = 100\Omega$** ,



(D1b)

2) Caso: **$R_u = 10\Omega$** .



(D1c)

Dai diagrammi (D1b), (D1c) possiamo dedurre facilmente che la **perdita di linearità del potenziometro lineare cresce notevolmente all'aumentare del carico**, ossia al diminuire del valore di R_u . Inoltre, la tensione massima disponibile passa dai 10V nel caso ideale, ai 9.09V con $R_i = 10\Omega$, agli 8.33V con $R_u = 100\Omega$ fino a ridursi ai 4.76V con $R_u = 10\Omega$. Si verifica perciò anche una perdita di energia all'interno del generatore, man mano che il carico esterno aumenta. (I diagrammi sono stati ottenuti mediante un programma di simulazione).

A questo punto, senza addentrarci oltre nell'analisi degli altri tipi di potenziometri, possiamo trarre le seguenti conclusioni sul circuito e sui suoi componenti.
Possiamo affermare che:

- 1) Il generatore è sollecitato in modo non costante al variare del carico.**
- 2) La legge del partitore è tanto meno lineare quanto più ci si allontana dalle condizioni ideali**
- 3) Questo sistema non riesce a trasferire energia costante dal generatore al carico al variare dell'attenuazione.**

Da quanto detto sopra si deduce che, a parte la linearità, se si volesse avere il massimo trasferimento d'energia da generatore a carico, contemporaneamente alla necessità di attenuazioni variabili, *non è questo il circuito da utilizzare.*

E' ovvio che l'approfondimento fatto sul Potenziometro Lineare può essere fatto anche sugli altri tipi, con qualche difficoltà di calcolo in più, per vedere di quanto l'andamento reale si sposti dalla funzione teorica $v_u = f(\alpha)$. Io, onestamente, non ho fatto alcun tentativo in tal senso. Ai bravi e ai volenterosi quest'incombenza!

Febbraio 2012

Nicola del Ciotto