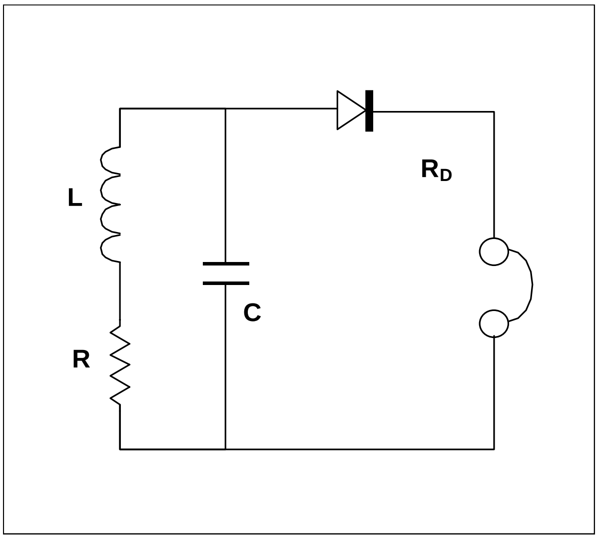
DIMENSIONAMENTO OTTIMO DI UN CIRCUITO DI SINTONIA LCR PER RADIO A CRISTALLO

(di Giacomo Cavuoti)

Si determina il dimensionamento ottimo (massimo fattore di merito Q) dei parametri di un tank di sintonia LCR per ricevitori a cristallo, compresi i parametri geometrici della bobina (cilindrica avvolta in aria), assegnata la sola frequenza di funzionamento e l'impedenza di carico del diodo-cuffia R_D.

Per chiarezza si premette la legenda dei simboli utilizzati.



Legenda simboli

L	induttanza bobina	[H]
C	capacità condensatore	[F]
R	resistenza bobina	[Ω]
f	frequenza	[Hz]
ω	pulsazione $\omega=2\pi f$	[rad/s]
N	numero spire bobina	[-]
D	diametro supporto bobina	[m]
H	lunghezza bobina	[m]
d	diametro filo bobina	[m]
P_T	passo spire	[m]
l	lunghezza totale filo bobina	[m]
μ	permittività magnetica conduttore bobina	[H/m]
ρ	resistività conduttore bobina	[Ωm
x	rapporto snellezza bobina x=H/D	[-]
a, b	costanti calcolo	

CALCOLO

Dall'espressione per l'induttanza di bobine cilindriche in aria:

$$L = \frac{N^2 D}{a\left(b + \frac{H}{D}\right)} \qquad a = 1.013\times10^6\ m/H \qquad b = 0.4526 \qquad [L] = H$$

con le seguenti posizioni:

$$x \equiv \frac{H}{D} \qquad N = \frac{H}{P_T} = \frac{H}{D}\frac{D}{P_T} = x\frac{D}{P_T}$$

si ottiene una espressione per il diametro del supporto in funzione del rapporto $H/D \equiv x$:

$$L = \frac{\left(x\frac{D}{P_T}\right)^2 D}{a\left(b+x\right)} = \frac{x^2 D^3}{P_T^2 a\left(b+x\right)} \qquad \Rightarrow D^3 = L\,P_T^2 a\frac{b+x}{x^2}$$

Dall'espressione per la resistenza di un filo con effetto pelle:

$$R = \frac{l\rho}{\pi d\delta} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \qquad \mu_{Cu} = 1.257\times10^{-6}\ H/m \qquad \rho_{Cu} = 1.68\times10^{-8}\ \Omega m$$

$$R = \frac{\sqrt{\mu\rho}}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\omega}\frac{l}{d} = \alpha\sqrt{\omega}\frac{l}{d} \qquad \alpha \equiv \frac{\sqrt{\mu\rho}}{\pi\sqrt{2}}$$

tenendo conto che la lunghezza totale del filo l si può esprimere come

$l = \pi DN$

si ottiene con l'espressione di D ricavata prima:

$$R = \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi DN}{d} = \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi}{d}Dx\frac{D}{P_T} = \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi}{dP_T}D^2x = \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi}{dP_T}\left(L\,P_T^2 a\frac{b+x}{x^2}\right)^{2/3} x$$

$$R = \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi}{dP_T}\left(L\,P_T^2 a\right)^{2/3}\left(\frac{b+x}{x^2}\right)^{2/3} x = \beta\left(\frac{b+x}{x^{1/2}}\right)^{2/3} \qquad \beta \equiv \alpha\sqrt{\omega}\frac{\pi}{dP_T}\left(L\,P_T^2 a\right)^{2/3}$$

E'quindi possibile calcolare il valore del rapporto $H/D \equiv x$ che minimizza la resistenza R della bobina ad induttanza assegnata L:

$$f(x) \equiv \frac{b+x}{x^{1/2}} \qquad Min\,R = Min\ f$$

$$f' = \frac{\sqrt{x} - \frac{b+x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x-b-x}{2x\sqrt{x}} = 0 \qquad \Rightarrow \|x = b\| \qquad b' \equiv \left(\frac{b+x}{\sqrt{x}}\right)^{2/3} = \left(4b\right)^{1/3}$$

Si ottiene quindi l'importante risultato che la bobina ottima (a minima R, massimo Q) è quella con rapporto $H/D \equiv x = b \cong 0.45$

A questo punto si può esprimere R come:

$$R = \gamma L^{2/3}\sqrt{\omega} \qquad \gamma \equiv \alpha \frac{\pi}{dP_T}\left(P_T^2 a\right)^{2/3} b'$$

e tenendo conto che:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad C = \frac{1}{L\omega^2}$$

l'espressione (molto bene approssimata per Q>>1) della impedenza massima del tank di sintonia:

$$Z_{\max} = \frac{1}{R}\frac{L}{C} = \frac{1}{R}\omega^2 L^2 = Q\omega L \qquad Q \equiv \frac{\omega L}{R}$$

si esprime come segue e viene posta pari all'impedenza di carico equivalente del diodo+cuffia R_D :

$$Z_{\max} = \frac{1}{\gamma L^{2/3}\sqrt{\omega}}\omega^2 L^2 = \frac{1}{\gamma}\omega^{3/2} L^{4/3} = R_D$$

Si ottiene quindi una prima relazione tra induttanza (ottima) e pulsazione:

$$\left\| L = \left(\gamma R_D\right)^{3/4}\frac{1}{\omega^{9/8}} \right\|$$

Considerando di scegliere il diametro del filo in modo da avere sempre la stessa corona anulare di conduzione per effetto pelle si ha:

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}} \qquad d\,\delta = \text{cost} \qquad d \propto \frac{1}{\delta} \propto \sqrt{\omega} \qquad d = \phi\sqrt{\omega} \qquad \phi \cong 1.2\times 10^{-7}\, ms/rad$$

e definito il rapporto p tra passo spire P_T e diametro filo d

$$P_T = pd \qquad \left\| p \equiv \frac{P_T}{d} \right.$$

si ottiene quindi:

$$\gamma \equiv \alpha \frac{\pi}{d\,P_T}\left(P_T^2 a\right)^{2/3} b' = \alpha\frac{\pi}{\phi^2 p}\left(\phi^2 p^2 a\right)^{2/3} b'\sqrt{\omega}^{4/3-2} = \gamma'\omega^{-1/3}$$

$$L = \left(\gamma' R_D\right)^{3/4}\frac{1}{\omega^{9/8}\omega^{1/4}} = \left(\gamma' R_D\right)^{3/4}\frac{1}{\omega^{11/8}} = \left(\gamma' R_D\right)^{3/4}\frac{1}{\omega^{11/8}}$$

ossia in definitiva le relazioni cercate che legano l'induttanza, la capacità ed il rapporto L/C ottimi (massimo fattore di merito) alla pulsazione ω:

$$\left\| \begin{aligned} & L = \left(\gamma' R_D\right)^{3/4}\frac{1}{\omega^{1.375}} \\ & C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{\left(\gamma' R_D\right)^{3/4}\omega^{0.625}} \\ & \frac{L}{C} = \left(\gamma' R_D\right)^{3/2}\frac{1}{\omega^{0.75}} \end{aligned} \right\|$$

A controprova della relazione ottenuta tra induttanza della bobina e frequenza si mostra un grafico in cui compiono in rosso i valori suggeriti nel n° 188 di Nuova Elettronica e l'andamento di quelli ottenuti dal calcolo in blu.