

Nicola del Ciotto

**(BREVI APPUNTI DI ELETTROTECNICA – Parte 1ª)**

# I CINQUE TEOREMI FONDAMENTALI

**Prerequisiti:**

Conoscenza dei principi e delle leggi fondamentali dell'Elettricità.

Sufficiente conoscenza dell'analisi matematica e della teoria dei numeri complessi.

**Obiettivi:**

Capacità di risoluzione di circuiti elettrici.

I circuiti elettrici si risolvono generalmente con i principi e le leggi dell'Elettricità generale (Principi di Kirchhoff, Legge di Ohm, Legge di Joule, ecc...), ma vi sono **alcuni teoremi fondamentali che aiutano moltissimo e contribuiscono notevolmente alla semplificazione e alla risoluzione delle reti elettriche.**

Essi sono:

Teorema di Thevenin  
Teorema di Norton  
Teorema di Millmann  
Teorema di Miller  
Teorema di Carson

Il loro campo di applicazione è valido solo per le reti lineari e normali (cioè riproducibili nel tempo), in cui si può sostenere con certezza che esista il principio di sovrapposizione degli effetti. Per chiarezza diciamo che una rete è lineare se è composta tutta da elementi lineari: ciò vale a dire che se c'è un solo diodo nel circuito tutta la semplicità del discorso cade e i ragionamenti si fanno più complicati.

## 1) Teorema di Thevenin

*Questo teorema è basilare per la risoluzione e per la semplificazione delle reti elettriche, comunque esse siano complesse.*

Quante volte abbiamo misurato con un tester la tensione di rete ai morsetti di una presa? Quante volte ci siamo accorti che, aggiungendo un carico sostanzioso al nostro impianto di casa (ad esempio accendendo un forno elettrico in cucina), la luminosità delle lampadine accese è leggermente diminuita? **Ebbene, senza saperlo, abbiamo applicato il teorema di Thevenin** poiché dobbiamo considerare che dietro ai morsetti della nostra presa vi è di fatto tutta la rete elettrica di distribuzione! Perciò sembra che tutte le resistenze, le reattanze, le perdite, le dissipazioni della rete siano viste ai morsetti della presa come una resistenza o, meglio, come l'impedenza interna di un solo ed ideale generatore di tensione. E' proprio quest'impedenza che provoca la caduta di tensione osservata. Il teorema di Thevenin, quindi, è un teorema presente ogni volta che abbiamo a che fare con le reti elettriche collegate con il modo esterno **tramite due morsetti**. Possiamo esprimerlo semplicemente così:

*Una rete elettrica lineare comunque complicata e con due morsetti d'uscita A e B, può sempre ridursi, su questi due morsetti, ad un generatore ideale equivalente di tensione  $V_{eq}$  con un'impedenza equivalente in serie  $Z_{eq}$ .*

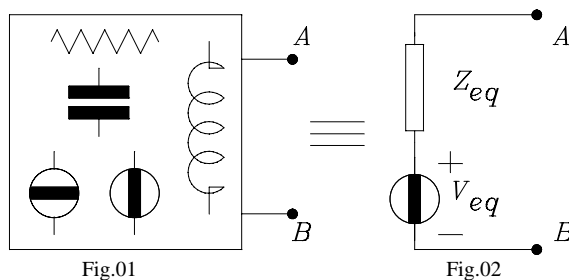
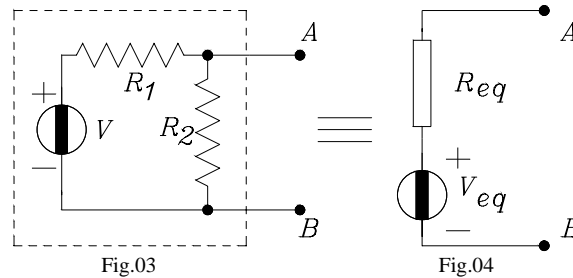


Fig.01

Fig.02

In Fig.01 è stilizzato un circuito, in cui sono presenti sia elementi attivi che elementi passivi, che ha accessibilità a due morsetti (A,B) ai quali può essere connesso un carico  $Z$ . Per Thevenin questo circuito è equivalente al semplice circuito di Fig.02, in cui la  $V_{eq}$  è la tensione che si legge, **a vuoto**, sui morsetti A e B, e l'impedenza  $Z_{eq}$  è uguale a quella che appare ai morsetti A,B quando il circuito non ha più sorgenti di energia, ossia quando i generatori interni di tensione sono stati cortocircuitati e i generatori di corrente sono stati staccati. Non dimostriamo matematicamente il teorema ma **facciamo un semplice esempio applicativo** per chiarire le nostre affermazioni.

Si abbia il semplice bipolo di Fig.03 la cui rete confluisce sui morsetti A e B. Vogliamo trovare il circuito equivalente, secondo Thevenin (Fig.04).



Come si vede, la rete è costituita da un comune partitore di tensione, perciò la tensione equivalente  $V_{eq}$  a vuoto che misureremo ai morsetti (A,B) è data dalla sua legge:

$$V_{AB} = V_{eq} = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

Troviamo, ora, la  $R_{eq}$ . Per togliere energia al bipolo dobbiamo cortocircuitare V (non cortocircuiteremo veramente il generatore! in pratica si toglie il generatore ed al suo posto si collega uno spezzone di filo). Così la resistenza  $R_1$  si pone in parallelo alla  $R_2$ . La ben nota relazione del parallelo

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

fornisce la resistenza equivalente della rete. Abbiamo, in questo caso, definito con facilità i due parametri  $V_{eq}$  e  $R_{eq}$  della rete di Fig.03, secondo Thevenin.

### *Esercizio:*

Una misura su una presa domestica ha fornito, a vuoto, un valore di tensione pari a 220V (quindi  $V_{eq}=220V$ ). Con l'inserzione di un carico P di 1380W (potenza P nominale con alimentazione a 220V), la tensione è scesa a 218V.

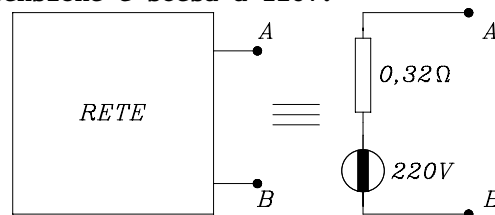


Fig.05

**Qual è il valore della resistenza equivalente  $R_{eq}$  della rete di distribuzione, vista ai morsetti di quella particolare presa?**

La tensione  $V_{eq}$  del generatore equivalente è, ovviamente, pari a 220V, quindi già nota. La resistenza *nominale* del carico P è, per la legge di Joule:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{1380} \cong 35\Omega$$

Quindi, la corrente che scorre nel carico P, quando è sottoposto ad una tensione di 218V è, per la legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{218}{35} = 6,23A.$$

La I è anche la corrente di maglia del circuito equivalente, secondo Thevenin.

La caduta di tensione  $\Delta V = 220 - 218 = 2V$  si dispone ai capi della resistenza interna equivalente  $R_{eq}$  tuttora incognita. Ma, ancora per la legge di Ohm, possiamo scrivere:

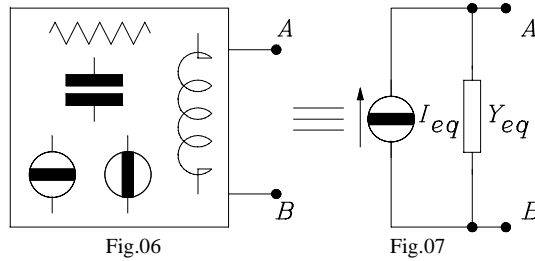
$$R_{eq} = \frac{\Delta V}{I} = \frac{2}{6,23} = 0,32\Omega$$

Abbiamo, così, trovato i valori equivalenti  $V_{eq}$  e  $R_{eq}$  di **tutta** la rete di distribuzione, **vista** ai morsetti della nostra presa, come abbiamo disegnato in Fig.05.

## 2) Teorema di Norton

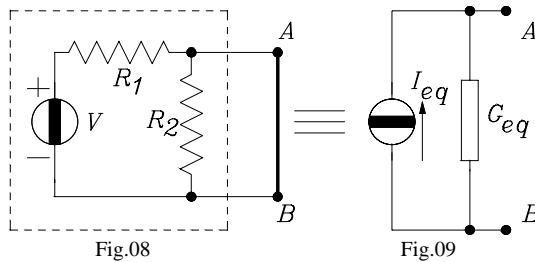
Il Teorema di Thevenin ha il suo reciproco nel teorema di Norton. Possiamo esprimere il teorema di Norton semplicemente in questi termini:

**Una rete elettrica lineare comunque complicata, con due morsetti d'uscita A e B può sempre ridursi, su questi due morsetti, ad un generatore ideale equivalente di corrente  $I_{eq}$  con un'ammettenza in parallelo  $Y_{eq}$ .**



Nella Fig.06 è stilizzato lo stesso circuito visto in precedenza, in cui sono presenti sia elementi attivi che elementi passivi, che ha accessibili due morsetti (A e B) col mondo esterno. Nel circuito equivalente di Fig.07 è presente il generatore  $I_{eq}$  della corrente che viene fornita all'esterno quando i morsetti sono in corto circuito (per cui  $I_{eq} = I_{cc} = I_{max}$ ). L'ammettenza  $Y_{eq}$  è uguale a quella che appare ai morsetti A e B quando il circuito non ha più sorgenti d'energia, ossia quando i generatori interni di tensione sono cortocircuitati e i generatori di corrente sono staccati. Anche qui non dimostriamo matematicamente il teorema ma **facciamo un semplice esempio** per chiarire le nostre affermazioni.

Si abbia la stessa rete di Fig.03 riportata in Fig.08, che confluisce ai morsetti A e B. Vogliamo trovare il suo circuito equivalente, secondo Norton.



Il corto circuito dei morsetti A e B esclude la resistenza  $R_2$ . La corrente di corto circuito  $I_{cc}$  sarà perciò la  $I_{eq}$  che ci interessa:

$$I_{cc} = \frac{V}{R_1} = I_{eq}$$

Troviamo adesso la conduttanza  $G_{eq}$ . Tolto il cortocircuito su (A,B) ed escluso il generatore V (cortocircuitandolo), possiamo verificare che:

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(La  $G_{eq}$  è l'inversa della  $R_{eq}$  secondo Thevenin).

E' appena il caso di affermare che uno stesso circuito, pur rappresentato da due circuiti equivalenti diversi, non può dare risultati differenti ai morsetti d'uscita. Infatti la differenza di potenziale ai morsetti A e B, con l'applicazione del teorema di Norton, fornisce:

$$V_{AB} = I_{eq} \cdot R_{eq} = \frac{V}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

esattamente uguale a quella fornita applicando le definizioni del teorema di Thevenin e la legge del partitore.

**Il teorema di Norton non è facilmente applicabile in elettrotecnica.** Infatti i circuiti che gestiscono forti potenze non possono essere cortocircuitati per determinarne la  $I_{eq}$  perché la notevole corrente di corto circuito porterebbe immediatamente alla distruzione degli stessi circuiti.

**Esercizio improponibile**

Applichiamo il teorema di Norton alla nostra spina per determinare qual è il generatore di corrente equivalente  $I_{eq}$  di **tutta la rete elettrica** che confluisce ai suoi due morsetti e qual è il valore della conduttanza equivalente  $G_{eq}$ .

**Dovremmo mettere in corto circuito la nostra spina (che, al massimo, sopporta 16A)! Se potessimo farlo otterremmo per  $I_{eq}$ :**

$$I_{cc} = I_{eq} = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{220}{0,32} = 687,5A !!!$$

La conduttanza equivalente sarebbe:

$$G_{eq} = \frac{I_{eq}}{V_{AB}} = \frac{687,5}{220} = 3,125\Omega^{-1} = 3125mS \text{ (milliSiemens)}$$

molto elevata, che porta ad un consumo interno di:

$$P = \frac{I_{eq}^2}{G_{eq}} = \frac{687,5^2}{3,125} = 151,25KW !!!$$

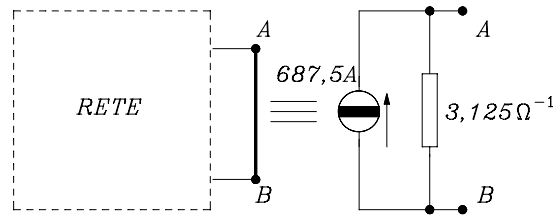


Fig. 09a

(ovviamente l'inverso di 3125mS è 0,32Ω). La Fig.09a mostra la situazione paradossale. E' interessante notare anche come la potenza fornita all'esterno sia uguale a zero! Infatti:  $V \cdot I = 0 \cdot I_{eq} = 0$ .

In elettronica invece, dove i generatori hanno impedenze interne alte se non elevate, l'applicazione del teorema di Norton è più accessibile. Facciamo un esempio:

Un generatore B.F., con impedenza interna di 600Ω, che fornisce una tensione max di 9V di segnale(valore già abbastanza grande!), al corto circuito eroga una corrente di:

$$I_{cc} = I_{eq} = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{9}{600} = 0,015A = 15mA$$

che può essere anche accettabile. La sua conduttanza parallelo è:

$$G_{eq} = \frac{I_{eq}}{V_{AB}} = \frac{0,015}{9} = 0,00166\Omega^{-1} = 1,66mS$$

abbastanza bassa (Ovviamente l'inverso di  $G_{eq}$  è uguale a  $R_{eq}=600\Omega$ ). Il consumo interno è pari a:

$$P = \frac{0,015^2}{1,66 \cdot 10^{-3}} = 0,015^2 \cdot 600 = 135mW$$

anche esso accettabile.

Quante volte succede che i puntali della sonda del generatore accidentalmente si toccano? Ebbene, il valore di 15mA rappresenta proprio la corrente massima  $I_{cc}=I_{max}=I_{eq}$  che, in questo caso, il generatore è costretto a fornire, alla massima tensione erogata.

-----\*-----

E' bene osservare, infine, che la semplicità degli schemi nelle Figure 03 e 08 prodotti come esercizi non deve far pensare a facili soluzioni di complicate reti elettriche, in ogni caso e in ogni momento. In fondo i teoremi di Thevenin e di Norton sono di principio generale! La risoluzione dei circuiti, appoggiandoci alla teoria di questi due teoremi, deve perciò essere compiuta con le comuni leggi e le comuni regole dell'Elettricità di base (Kirchhoff, Ohm, Joule, ecc.).

### 3) Teorema di Millmann

Anche il teorema di Millmann, pur essendo poco applicato perché raramente si verificano le giuste condizioni, è utile per la risoluzione dei circuiti elettrici. Lo possiamo esprimere così:

**In una rete comunque complicata, quando è possibile individuare due nodi rispetto ai quali tutti i rami sono in parallelo, la tensione tra essi è uguale alla somma delle correnti in ciascun ramo  $I_{eq}$  moltiplicata per la resistenza equivalente totale del circuito  $R_{eq}$ .**

La spiegazione di questo teorema discende direttamente dal principio di sovrapposizione degli effetti.

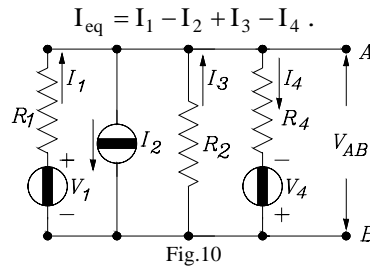
#### Facciamo un esempio.

In Fig.10 vi è disegnato un circuito che rispecchia esattamente le specifiche espresse dal teorema di Millmann nei nodi (morsetti) "A" e "B".

Si voglia determinare la tensione elettrica  $V_{AB}$  ai capi dei morsetti A e B; il teorema di Millmann dice che:

$$V_{AB} = I_{eq} \cdot R_{eq} \tag{1}$$

La corrente  $I_{eq}$  è data dalla somma algebrica delle **correnti di ramo** (non di maglia!):



La corrente  $I_3$  è nulla perché nel ramo 3 non vi sono generatori; tenendo conto dei versi delle correnti parziali e della legge di Ohm, possiamo scrivere:

$$I_{eq} = \frac{V_1}{R_1} - I_2 + 0 - \frac{V_4}{R_4}$$

La resistenza equivalente  $R_{eq}$  è data dal parallelo delle tre resistenze, dopo aver eliminato tutte le sorgenti di energia ( $V_1$  e  $V_4$  cortocircuitate e  $I_2$  interrotta):

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}}$$

Basta, ora applicare la (1) per trovare la  $V_{AB}$ .

### 4) Teorema di Miller

Questo teorema, scarsamente impiegato in elettrotecnica, è invece **utilissimo** nello studio degli **accoppiamenti tra quadripoli** in generale ed è **molto importante in elettronica**. Può essere espresso in questi termini:

*Due quadripoli visti in forma bipolare  $C_1$  e  $C_2$  connessi tra loro attraverso una resistenza (impedenza) in serie possono essere disgiunti (staccati senza squilibri interni) a condizione che ognuno di essi venga chiuso su una resistenza (impedenza) che sia equivalente alla parte soppressa.*

Se indichiamo con A il rapporto tra le tensioni viste ai morsetti dei due quadripoli:

$$A = \frac{V_2}{V_1}$$

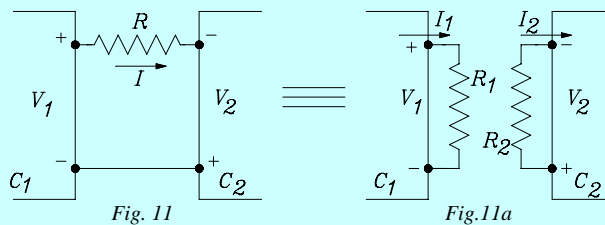
si può dimostrare che le resistenze equivalenti  $R_1$  e  $R_2$  da applicare ai due circuiti  $C_1$  e  $C_2$  quando vengono separati assumono le espressioni che le legano a R:

$$R_1 = \frac{R}{1+A}; \quad R_2 = \frac{R}{1+\frac{1}{A}} \tag{2}$$

### Approfondimento

Per chiarezza è necessario giustificare le (2).

La Fig.11 rappresenta il teorema. I quadripoli, visti come circuiti bipolari che si fronteggiano, sono  $C_1$  e  $C_2$ . Essi sono collegati tra loro tramite la resistenza R. E' importante segnalare il senso **equiverso** delle tensioni nella maglia formata dall'accoppiamento tra  $C_1$  e  $C_2$ .



Calcoliamo la resistenza  $R_1$  da porre all'uscita di  $C_1$ . Per la corrente vista dal **primo** quadripolo  $C_1$ , possiamo scrivere:

$$I = \frac{V_1 + V_2}{R} = \frac{V_1 \left( 1 + \frac{V_2}{V_1} \right)}{R} = \frac{V_1 \cdot (1+A)}{R}$$

Ma deve essere anche, (Fig.11a):  $I = I_1 = \frac{V_1}{R_1}$  per non avere squilibri nel quadripolo, perciò:

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_1 \cdot (1+A)}{R}$$

da cui:

$$R_1 = \frac{R}{1+A}$$

Facciamo altrettanto per la resistenza  $R_2$ , tenendo conto, ora, che la corrente  $I$  è vista dal **secondo** quadripolo  $C_2$ :

$$I = \frac{V_2 + V_1}{R} = \frac{V_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{A}\right)}{R}$$

Ma ora è, sempre dalla Fig.11a:  $I = I_2 = \frac{V_2}{R_2}$ , perciò:

$$\frac{V_2}{R_2} = \frac{V_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{A}\right)}{R}$$

da cui:

$$R_2 = \frac{R}{1 + \frac{1}{A}}$$

Se operiamo con grandezze alternate, si deve tener conto anche delle componenti reattive e le espressioni (2) diventano:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}}{1+A}; \quad \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}}{1 + \frac{1}{A}} \tag{3}$$

----\*----

Se le tensioni sono opposte, ai capi di  $R$  il rapporto  $A$  diventa minore di zero. In tal caso una delle due resistenze d'ingresso assume valore negativo. Ciò significa che tale resistenza si comporta da generatore.

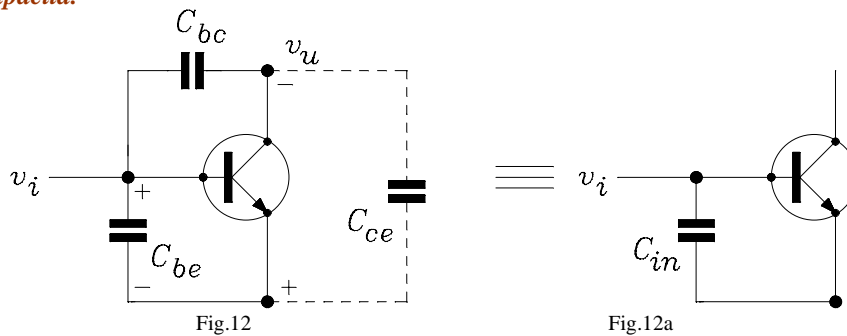
### *Effetto Miller*

#### **Effettuiamo ora un'applicazione importante del teorema di Miller.**

Sappiamo come sia essenziale, per la ricerca della frequenza di taglio superiore di uno stadio amplificatore, avere la conoscenza della capacità totale parallelo verso massa  $C_p$ , che è la somma di tutte le capacità verso massa, comprese quelle d'ingresso e d'uscita dell'elemento attivo.

Ma sappiamo anche quale sia la difficoltà della loro determinazione, proprio per la loro natura.

Un forte contributo alla  $C_p$  è dato comunque dalla capacità d'ingresso  $C_{in}$  dell'elemento attivo. Perciò sarebbe oltremodo vantaggioso conoscere con certezza almeno questa  $C_{in}$ . Ebbene, **il teorema di Miller è basilare per determinare tale capacità.**



Si osservi la Fig.12 che mette in evidenza le capacità interne di un elemento attivo (un transistor BJT, in questo caso, ma il tutto è valido anche nel caso di un tubo elettronico o di un FET). Nella Figura sono riportati anche i segnali d'ingresso e d'uscita con la giusta opposizione di fase.

Apparentemente potrebbe sembrare che la capacità d'ingresso  $C_{in}$  (Fig.12a) sia semplicemente la somma delle capacità  $C_{be}$  e  $C_{bc}$  di Fig.12 perché esse sembrano essere in parallelo facendo capo allo stesso nodo, ma non è così, in quanto le due capacità sono sottoposte a d.d.p. diverse. Perciò, poiché la  $C_{bc}$  è sottoposta alla differenza di potenziale  $v_i - v_u$  (Fig.12), interviene il teorema di Miller.

Per applicarlo, possiamo considerare il circuito d'ingresso come Bipolo  $C_1$  e quello d'uscita come Bipolo  $C_2$ , collegati tra loro dalla reattanza  $X_{C_{bc}} = \frac{1}{j\omega C_{bc}}$ .

Se rappresentiamo con  $A$  l'amplificazione dello stadio (sicuramente molto maggiore di 1 e sfasata fortunatamente di  $180^\circ$  in modo da ottenere il senso equiverso di  $v_i$  e  $v_u$ ), possiamo applicare la prima delle (3) al bipolo  $C_1$ :

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}}{1+A} \quad (4)$$

dove  $\bar{Z}_1$  è la reattanza della capacità d'ingresso da trovare ossia:  $\frac{1}{j\omega C_1}$ , e  $\bar{Z}$  è la reattanza della capacità  $C_{bc}$  ossia:

$$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C_{bc}}.$$

Con queste posizioni la (4) diventa:

$$\frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega C_{bc}(1+A)}$$

da cui si deduce direttamente che  $C_1 = C_{bc}(1+A)$ .

In conclusione, poiché  $C_{in}$  è data dalla somma  $C_{in} = C_{be} + C_1$ , la capacità d'ingresso dello stadio risulta:

$$C_{in} = C_{be} + C_{bc}(1+A) \quad (5)$$

sicuramente molto più grande della  $C_{in} = C_{be} + C_{bc}$ .

### **Questo fenomeno va sotto il nome di Effetto Miller.**

Il notevole valore della  $C_{in}$  abbassa, purtroppo, la frequenza di taglio superiore, con la conseguenza negativa di ridurre sensibilmente la banda passante dello stadio amplificatore. Per questo motivo, nella progettazione di uno stadio B.F. è indispensabile calcolare sempre la capacità d'ingresso  $C_{in}$  mediante Miller per non incorrere in sgradite sorprese finali.

**Facciamo un esempio:** Un triodo **6C4** viene utilizzato in uno stadio di amplificazione B.F. La sua capacità griglia-catodo  $C_{gk}$  è 1,8pF e la sua capacità griglia-anodo  $C_{ga}$  è 1,6pF. Poniamo un'amplificazione dello stadio pari a 14.

La capacità d'ingresso dello stadio **non sarà:**  $C_{in} = C_{gk} + C_{ga} = 1,8 + 1,6 = 3,4 pF$  come potrebbe sembrare, **ma:**

$$C_{in} = C_{gk} + C_{ga} \cdot (1+14) = 1,8 + 1,6 \cdot 15 = 25,8 pF$$

ben **7,6 volte più grande**. Perciò anche la frequenza di taglio superiore sarà fortemente ridotta. Se non facciamo questo calcoletto non dobbiamo meravigliarci poi che il nostro amplificatore non ha la banda passante che molto superficialmente avevamo prevista!

## **5) Teorema di Carson**

*L'importante Teorema di Carson o del massimo trasferimento di energia è basilare per l'adattamento e per il calcolo del rendimento quando si collega un generatore ad un carico.*

Possiamo enunciarlo, in modo molto semplice, esprimendo che **un generatore  $V_0$  con resistenza interna  $R_i$  eroga la sua massima potenza disponibile ad un carico  $R_u$  quando si verifica l'eguaglianza:  $R_i = R_u$  (Fig.13), ossia quando il valore ohmico del carico  $R_u$  uguaglia il valore della resistenza interna  $R_i$  del generatore  $V_0$ .**

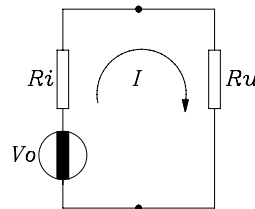


Fig.13

(Se, invece, le impedenze  $Z_i$  e  $Z_u$  sono complesse, deve verificarsi la condizione per cui l'una deve essere la complessa coniugata dell'altra).

### **Approfondimento:**

Accenniamo alla dimostrazione del teorema di Carson nel caso di grandezze reali (resistive). Possiamo scrivere per la corrente di maglia **I** (Fig.13):

$$I = \frac{V_0}{R_i + R_u} \quad (6)$$

La potenza erogata dal generatore ad  $R_u$  è data da:  $P_u = R_u \cdot I^2$ , perciò:

$$P_u = V_o^2 \cdot \frac{R_u}{(R_i + R_u)^2} \tag{7}$$

Per trovare il massimo della funzione (7), la deriviamo rispetto alla variabile  $R_u$  e imponiamo che il valore della derivata sia zero (qui si deve avere qualche buona cognizione di analisi matematica). Si ottiene:

$$\frac{dP_u}{dR_u} = \frac{1 \cdot (R_i + R_u)^2 - 2R_u(R_i + R_u)}{(R_i + R_u)^4} = \frac{R_i + R_u - 2R_u}{(R_i + R_u)^3} = 0$$

La riduzione a zero si verifica quando il numeratore risulta  $R_i + R_u - 2R_u = 0$ , da cui si deduce che deve essere:  $R_u = R_i$ .

Con un programma di funzioni in coordinate semilogaritmiche<sup>1</sup> disegniamo l'andamento della potenza in uscita da un generatore normalizzato ad IV con una resistenza interna  $R_i$  di  $0,5\Omega$ , mentre la resistenza di carico  $R_u$  varia tra un centesimo di  $R_i$  ( $0,005\Omega$ : quasi un corto circuito) a cento volte  $R_i$  ( $50\Omega$ : quasi un circuito aperto).

Imposteremo la funzione (7) in questo modo:  $Y=x/\text{sqrt}(0,5+x)$

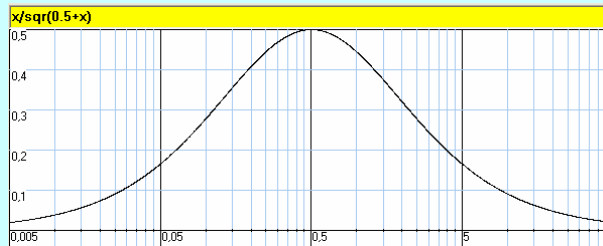


Fig.14

Il diagramma che si ottiene ci mostra come il massimo ( $0,5W$ ) della potenza fornita si ottenga quando il carico  $R_u$  assume il valore di  $0,5\Omega$  pari alla  $R_i$  interna.

Si può facilmente constatare che nel momento di massimo trasferimento di energia, cioè quando si verifica la condizione  $R_u = R_i$ , il rendimento

massimo del sistema è del 50%, vale a dire  $\eta = \frac{P_u}{P_o} = 0,5$  (cioè piuttosto basso).

Infatti in queste condizioni la potenza fornita dal generatore sfrutta tutta la tensione generata  $V_o$  su un carico complessivo interno ed esterno pari a  $2R_i$  ed è:  $P_o = V_o^2 / 2R_i$ ; quella utilizzata dal carico esterno sfrutta invece solo la metà della tensione ( $V_o/2$ ) su un carico pari a  $R_i$  ed è:

$P_u = V_o^2 / 4R_i$ . Basta fare il rapporto tra le due espressioni, per ottenere il valore del succitato rendimento ( $1/2$ ).

Possiamo, comunque, trovare qual è l'andamento del rendimento in generale tenendo conto della Fig.15, dove considereremo la  $R_u$  variabile entro ampi margini, quali, per esempio, quelli del grafico precedente.

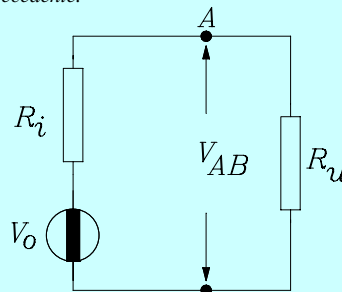


Fig.15

L'espressione della potenza totale  $P_o$  fornita dal generatore  $V_o$  è:

$$P_o = \frac{V_o^2}{2(R_i + R_u)}$$

La tensione  $V_{AB}$  ai capi del carico  $R_u$  è:

$$V_{AB} = V_o \frac{R_u}{R_i + R_u}$$

perciò la potenza  $P_u$  fornita al carico  $R_u$  è:

$$P_u = V_o^2 \left( \frac{R_u}{R_i + R_u} \right)^2 \frac{1}{2R_u} = V_o^2 \frac{R_u}{2(R_i + R_u)^2}$$

Perciò il rendimento avrà questa espressione:

$$\eta = \frac{P_u}{P_o} = \frac{R_u}{R_i + R_u}$$

<sup>1</sup> - Il programma si chiama DfunLog e può essere scaricato dalla sezione "Software" nel sito "Le Radio di Sophie".



Sul diagramma semilogaritmico, con il campo di valori già imposto per  $R_w$ , si vede chiaramente come al momento del massimo trasferimento di energia il rendimento assume il valore 0,5. Scriviamo la funzione così:  $Y = x/(0,5+x)$  per graficarla.

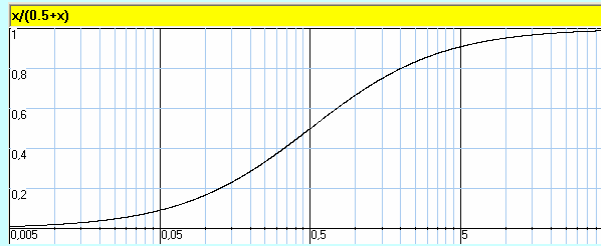


Fig.15a

Si può anche notare dal diagramma come in elettrotecnica è necessario che la resistenza interna del generatore sia la più piccola possibile rispetto a quella del carico, per avere rendimenti molto elevati.

-----\*-----

Il teorema di Carson è sempre applicato quando devono essere connessi tra loro due o più sistemi con **piccole quantità energetiche** a disposizione. In questi casi si parla di “adattamenti” tra un sistema all’altro per poter disporre del massimo trasferimento d’energia. Perciò “si adatta” un’antenna ad un cavo coassiale, un cavo coassiale “si adatta” ad un ingresso di un ricevitore, ecc...

Anche questo teorema però **non è facilmente applicabile in elettrotecnica** dove le potenze in gioco sono molto elevate. Infatti, se applicassimo effettivamente e **per assurdo** il teorema di Carson al circuito del primo esercizio di Fig.05 (qui riportato in Fig.16),

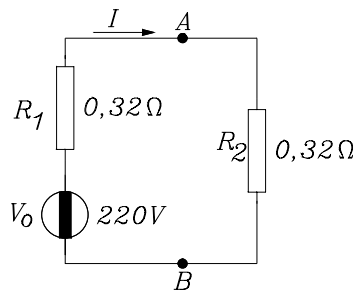


Fig.16

in modo da poter conoscere quanta potenza saremmo in grado di prelevare al massimo dalla nostra spina domestica, quando cioè è  $R_1 = R_2$ , avremmo i seguenti risultati:

$$R_t = R_1 + R_2 = 0,32 + 0,32 = 0,64\Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{0,64} = 343,75A$$

$$P_t = V \cdot I = 220 \cdot 343,75 = 75,625kW$$

$$P_u = R \cdot I^2 = 0,32 \cdot 343,75^2 = 37,8125kW$$

$$V_{AB} = R \cdot I = 0,32 \cdot 343,75 = 110V$$

Ciò vale a dire che dalla nostra presa domestica, che sopporta appena 16A, potremmo prelevare una corrente di oltre 340 Ampère! Che avremmo a disposizione oltre 37kW e che la rete dovrebbe fornire oltre 75kW di cui la metà dissipata sulla rete stessa! Se non ci fossero i fusibili o, ancora meglio, i “termici” i pompieri sarebbero indispensabili! E’ da notare anche come la tensione utile ai morsetti si sia ridotta alla metà.

**Diversamente** vanno le cose per un generatore con alta impedenza interna.

Riprendiamo il caso del nostro generatore di segnale B.F. considerato a Pag.4, che eroga una tensione max di 9V ed ha un’impedenza interna di 600Ω. Se lo sottoponiamo ad un carico di 600Ω, otteniamo:

$$R_t = R_1 + R_2 = 600 + 600 = 1200\Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9}{1200} = 7,5mA$$

$$P_t = V \cdot I = 9 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} = 67,5mW$$

$$P_u = R \cdot I^2 = 600 \cdot (7,5 \cdot 10^{-3})^2 = 33,75mW$$

$$V_{AB} = R \cdot I = 600 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} = 4,5V$$

Questi sono valori che possiamo sicuramente ritenere accettabili.

L'ultima relazione, dove si evidenzia concettualmente che la tensione ai morsetti A,B, nelle condizioni di massimo trasferimento d'energia, si riduce **sempre** alla metà del valore massimo, può essere molto utile nella pratica.

Per esempio, spesso è necessario conoscere con sufficiente esattezza l'impedenza d'uscita di un generatore, di un amplificatore od altro per poter poi adattare ad essi il carico appropriato.

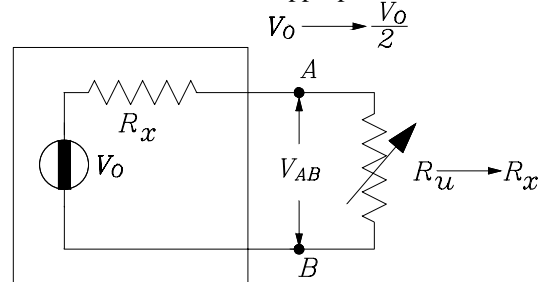


Fig.17

La Fig.17 ci mostra la semplice applicabilità del metodo secondo Carson. Basta collegare ai suoi morsetti un reostato e farlo variare finché non si legge su A,B una tensione che sia esattamente la metà della sua tensione a vuoto. A questo punto si stacca il reostato e si legge con un buon Ohmetro il suo valore. Questo valore rappresenta la resistenza interna dell'apparato.

Novembre 2013

Ing. Nicola del Ciotto