ATTENUATORI A "T"
AD IMPEDENZA COSTANTE

INTRODUZIONE

E' noto come il concetto di massimo trasferimento di energia tra generatore e carico, sia molto importante quando siamo in presenza di segnali informativi, che sono solitamente a basso livello energetico (collegamento di un cavo d'antenna ad un televisore, per esempio).

Il massimo trasferimento di energia è governato dal **teorema di Carson** che ora richiameremo brevemente

-----*-----

Richiami (Teorema di Carson)

*E' il caso di richiamare brevemente l'importante **Teorema di Carson** nel caso in cui le impedenze in gioco siano reali. Possiamo enunciarlo, in modo molto semplice, esprimendo **che un generatore** V_0 **con resistenza interna** R_i **eroga la massima potenza di cui dispone su un carico** R_u **quando si verifica l'eguaglianza:** $R_i = R_u$, ossia quando il valore ohmico del carico R_u uguaglia il valore della resistenza interna R_i del generatore V_0 (Fig.01).*

(Se, invece, le impedenze Z_i e Z_u sono complesse, deve verificarsi la condizione per cui l'una deve essere la complessa coniugata dell'altra).

-----*-----

Approfondimento:

Accenniamo alla dimostrazione del teorema di Carson nel caso di grandezze reali.

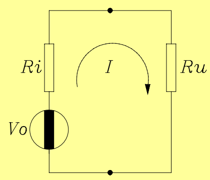


Fig.01

Possiamo scrivere per la corrente di maglia **I**:

$$I = \frac{Vo}{Ri + Ru} \tag{01}$$

La potenza erogata dal generatore su Ru è data da: $Pu = Ru \cdot I^2$, perciò:

$$Pu = Vo^2 \cdot \frac{Ru}{(Ri + Ru)^2} \tag{02}$$

Per trovare il massimo della (02), la deriviamo rispetto alla variabile Ru e imponiamo che il valore della derivata sia zero. Si ottiene:

$$\frac{dPu}{dRu} = \frac{1 \cdot (Ri + Ru)^2 - 2Ru(Ri + Ru)}{(Ri + Ru)^4} = \frac{Ri + Ru - 2Ru}{(Ri + Ru)^3} = 0$$

e ciò si verifica quando il numeratore $Ri + Ru - 2Ru = 0$, da cui si deduce che deve essere: $Ru = Ri$

Si può facilmente costatare che nel momento in cui vi è il massimo trasferimento di energia, il rendimento del sistema è del 50%, vale a dire $\eta = \frac{P_u}{P_0} = 0{,}5$. Infatti in queste condizioni la potenza fornita dal generatore sfrutta tutta la tensione generata su un carico complessivo interno ed esterno di 2Ri ed è: $P_0 = V_0^2 / 2Ri$; quella utilizzata dal carico esterno sfrutta invece solo la metà della tensione su un carico pari a Ri ed è: $P_u = V_0^2 / 4Ri$. Basta fare il rapporto tra le due espressioni, per ottenere il valore del succitato rendimento.

-----*-----

ATTENUATORI AD IMPEDENZA COSTANTE

Sappiamo che, al variare dell'attenuazione in una configurazione potenziometrica, il generatore è sottoposto ai mutamenti del carico applicato, per cui è raro che esso si possa trovare nelle condizioni di fornire il massimo trasferimento di energia, rispettando contemporaneamente anche l'attenuazione imposta. Inoltre un generatore reale è lontano dalle condizioni ideali di resistenza interna: $R_i = 0$. Poiché, quindi, la R_i non è uguale a zero e gli utilizzatori non hanno resistenza R_u infinita, la via da seguire, quando abbiamo bisogno di attenuazioni a massimo trasferimento di energia, è quella di indagare se esista qualche **quadripolo attenuatore** la cui configurazione sia tale che, se alla sua uscita si collega un carico Z_0, nello stesso momento al suo ingresso compaia un'impedenza anch'essa pari a Z_0 che sia uguale all'impedenza interna Z_0 del generatore: solo così sarà soddisfatto il teorema di Carson.

Sembra chiedere troppo; questi quadripoli, invece, esistono e sono chiamati **Attenuatori ad Impedenza Costante.** Essi sono molto usati nelle linee di comunicazione ed, in particolare, nella strumentazione di misura, dove sono realizzati sotto forma di attuatori logaritmici a levetta, a pulsante, o altro... Perciò dietro le scritte -3dB, -10dB, ecc..., che spesso notiamo nei comandi sui pannelli degli strumenti e che ovviamente spesso adoperiamo, vi sono degli attenuatori ad impedenza costante. **Noi fermeremo la discussione solo sugli Attenuatori a "T"**

Richiami (cellule a "T"):

*Prima di affrontare lo studio degli Attenuatori ad Impedenza costante, è bene richiamare qualche nozione sulle **Cellule a "T".**(Lo stesso studio si può fare sulle **Cellule a "Π"** ossia sulle cellule a pi-greco). Una Cellula a "T" è rappresentata in modo molto generale come in Fig.02, e la sua **Impedenza Caratteristica Zo** è data dall' **importante relazione**:*

$$\bar{Z}o = \sqrt{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1^2}{4}} \qquad (03)$$

che è funzione delle impedenze che la costituiscono. La (03) vale a condizione che l'uscita sia connessa ad un carico il cui valore sia uguale a Z_0, pari all'impedenza interna del generatore.

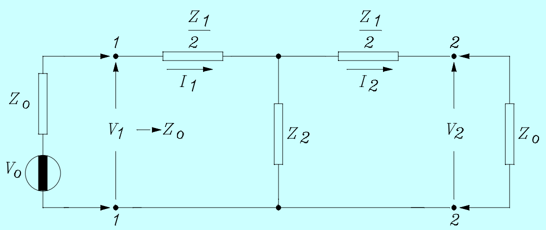


Fig.02

E' interessante notare come il rapporto tra le tensioni di ingresso e di uscita e il rapporto tra le rispettive correnti diano luogo alla stessa espressione, che è la seguente:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1}{2} + \bar{Z}o} \qquad (04)$$

Deve essere così, poiché le impedenze di ingresso e di uscita sono le stesse.

-----*-----

Approfondimenti Matematici

Per i più esigenti giustifichiamo le due espressioni (03) e (04).

1) Facciamo riferimento alla Fig.02. e imponiamo la condizione per cui, se applichiamo ai morsetti "2" un'impedenza di valore Zo, lo stesso valore deve essere visto ai morsetti "1". Perciò applicando le leggi dell'elettrotecnica che risolvono le serie e i paralleli, scriviamo:

$$\overline{Z}o = \frac{\overline{Z}1}{2} + \frac{\overline{Z}2 \cdot \left(\frac{\overline{Z}1}{2} + \overline{Z}o\right)}{\overline{Z}2 + \frac{\overline{Z}1}{2} + \overline{Z}o} \qquad (05)$$

Sviluppiamo la (05):

$$Zo \cdot \left(Z2 + \frac{Z1}{2} + Zo\right) = \frac{Z1}{2} \cdot \left(Z2 + \frac{Z1}{2} + Zo\right) + Z2 \cdot \left(\frac{Z1}{2} + Zo\right)$$

$$Zo \cdot Z2 + \frac{Zo \cdot Z1}{2} + Zo^2 = \frac{Z1 \cdot Z2}{2} + \frac{Z1^2}{4} + \frac{Z1 \cdot Zo}{2} + \frac{Z1 \cdot Z2}{2} + Zo \cdot Z2$$

Dopo la semplificazione, si ottiene:

$$\overline{Z}o^2 - \overline{Z}1 \cdot \overline{Z}2 - \frac{\overline{Z}1^2}{4} = 0 \qquad (06)$$

da cui la (03) che rappresenta l'impedenza caratteristica della Cellula a "T".

2) Calcoliamo ora **il rapporto delle correnti** nel **"T"**.

Per comodità e chiarezza di calcolo, disegniamo in modo diverso il circuito di Fig.02, ottenendo lo schema di Fig.03.

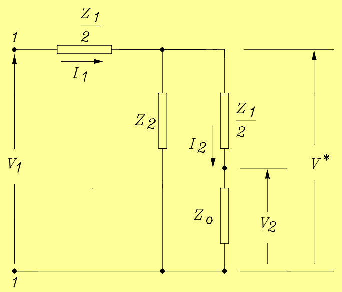


Fig.03

La corrente I2 è data da:

$$I2 = \frac{V^*}{\frac{Z1}{2} + Zo} \qquad (07)$$

ma è:

$$V^* = I1 \cdot Zp \qquad (08)$$

dove la Z_P ha l'espressione del parallelo tra la Z_2 e la serie di $Z_1 / 2$ e Z_0 :

$$Zp = \frac{Z2 \cdot \left(\frac{Z1}{2} + Zo\right)}{Z2 + \frac{Z1}{2} + Zo} \qquad (09)$$

quindi:

$$I2 = \frac{I1 \cdot Zp}{\left(\frac{Z1}{2} + Zo\right)} = I1 \cdot \frac{Z2 \cdot \left(\frac{Z1}{2} + Zo\right)}{Z2 + \frac{Z1}{2} + Zo} \cdot \frac{1}{\left(\frac{Z1}{2} + Zo\right)} \qquad (10)$$

da cui la

$$\frac{I2}{I1} = \frac{\overline{Z}2}{\overline{Z}2 + \frac{\overline{Z}1}{2} + \overline{Z}o} \qquad (11)$$

3) Calcoliamo infine **il rapporto delle tensioni**, facendo riferimento sempre alla Fig.03. Possiamo scrivere che:

$$V2 = V^* \cdot \frac{Zo}{\frac{Z1}{2} + Zo} \qquad (12)$$

ma è anche:

$$V^* = V1 \cdot \frac{Zp}{\frac{Z1}{2} + Zp} \qquad (13)$$

quindi:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{Zp}{\frac{Z_1}{2} + Zp} \cdot \frac{Zo}{\frac{Z_1}{2} + Zo} \qquad (14)$$

Ponendo al posto di Zp la sua espressione e semplificando si ha, a seguire:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{\dfrac{Z_2 \cdot \left(\dfrac{Z_1}{2} + Zo\right)}{\left(Z_2 + \dfrac{Z_1}{2} + Zo\right)}}{\dfrac{Z_1}{2} + \dfrac{Z_2 \cdot \left(\dfrac{Z_1}{2} + Zo\right)}{Z_2 + \dfrac{Z_1}{2} + Zo}} \cdot \frac{Zo}{\dfrac{Z_1}{2} + Zo} = = V_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot Zo}{\dfrac{Z_1}{2} \cdot \left(Z_2 + \dfrac{Z_1}{2} + Zo\right) + Z_2 \cdot \left(\dfrac{Z_1}{2} + Zo\right)} =$$

$$= V_1 \cdot \frac{Zo \cdot Z_2}{\left(Z_1 \cdot Z_2 + \dfrac{Z_1^2}{4}\right) + \dfrac{Z_1 \cdot Zo}{2} + Z_2 \cdot Zo} = V_1 \cdot \frac{Zo \cdot Z_2}{Zo^2 + \dfrac{Z_1 \cdot Zo}{2} + Z_2 \cdot Zo} \qquad (15)$$

cioè:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_2}{Zo + \dfrac{Z_1}{2} + Z_2} \qquad (16)$$

uguale a quello delle correnti.

-----*-----

Quadripoli a "T" resistivi

Studiamo, ora, i quadripoli attenuatori a "T".

Se vogliamo avere attenuazioni solo in modulo senza variazioni di fase, dobbiamo necessariamente utilizzare attenuatori puramente resistivi. Sia dato, quindi, un **quadripolo a "T"** ***puramente resistivo*** rappresentato in Fig.04.

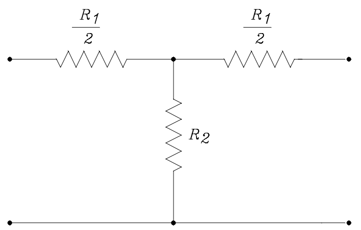


Fig.04

La sua **Impedenza Caratteristica Ro** sarà anch'essa resistiva e, con le notazioni che già sappiamo, sarà espressa da:

$$\boxed{Ro = \sqrt{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_1^2}{4}}\ ;} \qquad (17)$$

Le tensioni e le correnti saranno, ovviamente, in fase e il loro rapporto definirà **l'attenuazione.** L'attenuazione potrà essere calcolata, per l'uguaglianza delle due espressioni già constatata, sia mediante il rapporto tra le tensioni sia mediante il rapporto tra le correnti.

Indichiamo ad esempio con **"n"** il rapporto tra le correnti I_1 e I_2 e teniamo presente l'espressione di R_0. Possiamo scrivere il sistema di equazioni nelle due incognite R_1 e R_2:

$$\begin{cases} n = \dfrac{R_2 + \dfrac{R_1}{2} + Ro}{R_2} \\ Ro^2 = R_1 \cdot R_2 + \dfrac{R_1^2}{4} \end{cases} \qquad (18), (19)$$

La sua risoluzione ci fornisce i valori di R_1 e R_2 per una data attenuazione "n":

$$R_2 = Ro \cdot \frac{2n}{n^2 - 1}; \qquad (20)$$

$$\frac{R_1}{2} = Ro \cdot \left(\frac{n-1}{n+1}\right); \qquad (21)$$

<u>Le (20) e (21) sono le due espressioni fondamentali per il calcolo dei quadripoli attenuatori a "T".</u>

Approfondimento matematico:

Giustifichiamo la (20) e la (21). Riprendiamo le equazioni (18) e (19) e risolviamo la prima rispetto a R1:

$$R_1 = 2 \cdot \left[R_2 \cdot (n-1) - Ro\right] \qquad (22)$$

Risolviamo in R2 la seconda equazione e poi sostituiamo in essa l'espressione di R1:

$$R_2 = \frac{Ro - \frac{R_1^2}{4}}{R_1} = \frac{Ro^2 - \left[R_2 \cdot (n-1) - Ro\right]^2}{2 \cdot \left[R_2 \cdot (n-1) - Ro\right]} \qquad (23)$$

da cui:

$$2 \cdot R_2 \cdot \left[R_2 \cdot (n-1) - Ro\right] = Ro^2 - \left[R_2 \cdot (n-1) - Ro\right]^2$$

ossia, dopo alcuni passaggi:

$$R_2 \cdot \left\{R_2 \cdot \left[2(n-1) + (n-1)^2\right] - 2n \cdot Ro\right\} = 0 \qquad (24)$$

Quest'equazione di secondo grado ammette una soluzione $R_2 = 0$ fisicamente inaccettabile. Sarà, perciò, da considerare l'altra soluzione che proviene da:

$$R_2 \cdot \left[2(n-1) + (n-1)^2\right] - 2n \cdot Ro = 0 \qquad (25)$$

cioè:

$$R_2 = \frac{2n \cdot Ro}{2(n-1) + (n-1)^2} = Ro \cdot \frac{2n}{n^2 - 1}; \qquad (26)$$

ossia la (20) che determina il valore della **resistenza trasversale** R_2.

Per trovare ora il valore della **resistenza serie** R_1 sostituiamo R_2 nella 1ª equazione (22). Avremo:

$$R_1 = 2\left[Ro \cdot \frac{2n}{n^2-1} \cdot (n-1) - Ro\right] = 2\left[Ro \cdot \frac{2n}{(n+1)(n-1)} \cdot (n-1) - Ro\right] =$$

$$= 2Ro\left(\frac{2n}{n+1} - 1\right) = 2Ro \cdot \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right) = 2Ro \cdot \left(\frac{2n-n-1}{n+1}\right) \qquad (27)$$

quindi il risultato della (21).

-----*-----

ESEMPI ED ESERCIZI

Svolgiamo, ora, qualche esercizio, che possa essere valido come esempio di progettazione, per applicare i concetti esposti finora.

1) Calcolo di una cellula attenuatrice a "T".

`1)` Vogliamo realizzare una **cellula a "T"** con resistenza caratteristica $R_0 = 50\Omega$ **che attenui di 1,5 volte** il segnale di ingresso (riferiamoci alla Fig.06):

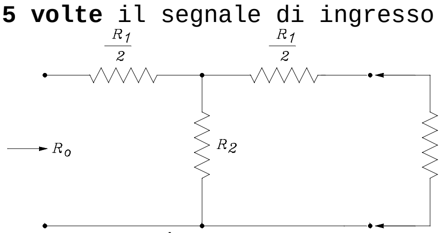


Fig.06

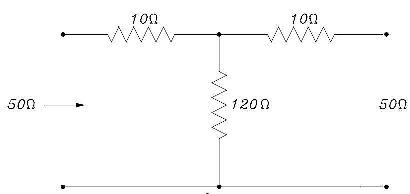


Fig.07

Possiamo calcolare R1 e R2 (Fig.07):

$$R_2 = 50 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}5}{1{,}5^2 - 1} = 120\Omega \; ; \qquad \frac{R_1}{2} = 50 \cdot \left(\frac{1{,}5 - 1}{1{,}5 + 1}\right) = 10\Omega$$

Per riscontrare l'esattezza del calcolo eseguito, controlliamo se la cellula ha, effettivamente, l'impedenza caratteristica di 50Ω. Ricordando che:

$$Zo = \sqrt{Zc \cdot Zv}$$

(dove con Z_C s'intende l'impedenza della cellula con l'uscita in corto circuito e con Z_V l'impedenza con l'uscita aperta), calcoliamo i due valori:

$$Zc = 10 + \frac{120 \cdot 10}{120 + 10} = 19{,}23\Omega \; ; \qquad Zv = 10 + 120 = 130\Omega$$

L'impedenza caratteristica è effettivamente:

$$Zo = \sqrt{19{,}23 \cdot 130} = 50\Omega$$

2) Vogliamo un'attenuazione di -6dB su 600ohm.

Con il solito schema abbiamo:

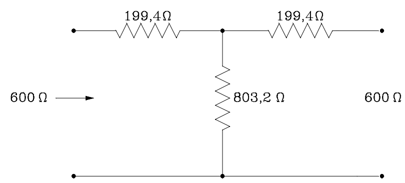


Fig.08

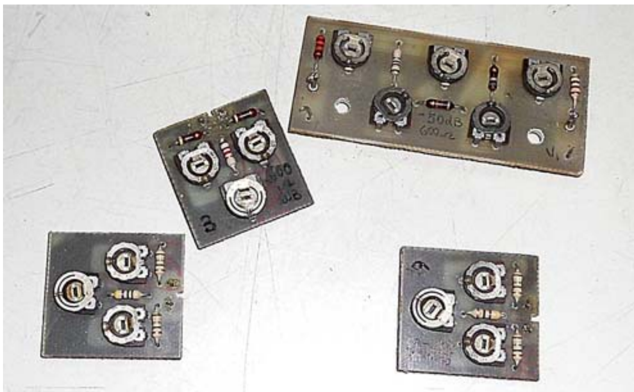
Determiniamo l'attenuazione assoluta "n":

$$n = 10^{\frac{6}{20}} = 1{,}995$$

I valori dei componenti resistivi sono:

$$R_2 = 600 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}995}{1{,}995^2 - 1} = 803.2\Omega \; ; \qquad \frac{R_1}{2} = 600 \cdot \frac{1{,}995 - 1}{1{,}995 + 1} = 199.4\Omega$$

riportati direttamente sulla Fig.08.



Alcune vecchie piastrine attenuatrici a "T", utilizzate per attenuare un segnale di 50 dB, 6dB e 3dB su 600Ω. Si notano i trimmer di taratura dei rami serie e parallelo, per ottenere un valore molto preciso dell'attenuazione.

3) Vogliamo un'attenuazione di -12dB su 600ohm.

E' molto semplice. Si può calcolare una sola cellula con il metodo già visto sopra oppure si possono utilizzare senza problemi due cellule da **-6dB in cascata**.

4) Progetto di un attenuatore a scatti "1/15dB"

C'interessa un attenuatore variabile da 1 a 15 dB, con scatti di un dB alla volta, per avere un'ampia gamma di valori di tensione all'uscita di un generatore di segnale B.F.
Scegliamo il codice binario per ottenere tutti i valori della gamma.
In base a questa scelta basta calcolare solo quattro cellule attenuatrici con i seguenti valori di attenuazione: 1dB; 2dB; 4dB; 8dB. Imponiamo che l'impedenza caratteristica sia di 600Ω.
Determiniamo i valori assoluti delle varie attenuazioni e le componenti resistive delle rispettive cellule:

Atten. -1dB:

$$n_1 = 10^{\frac{1}{20}} = 1{,}122\ ; \quad R_2 = 600 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}122}{1{,}122^2 - 1} = 5200{,}8\Omega\ ; \quad \frac{R_1}{2} = 600 \cdot \frac{1{,}122 - 1}{1{,}122 + 1} = 34{,}5\Omega$$

Atten. -2dB:

$$n_2 = 10^{\frac{2}{20}} = 1{,}259\ ; \quad R_2 = 600 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}259}{1{,}259^2 - 1} = 2582{,}6\Omega\ ; \quad \frac{R_1}{2} = 600 \cdot \frac{1{,}259 - 1}{1{,}259 + 1} = 68{,}8\Omega$$

Atten. –4dB:

$$n_4 = 10^{\frac{4}{20}} = 1{,}585\ ; \quad R_2 = 600 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}585}{1{,}585^2 - 1} = 1257{,}7\Omega\ ; \quad \frac{R_1}{2} = 600 \cdot \frac{1{,}585 - 1}{1{,}585 + 1} = 135{,}8\Omega$$

Atten. –8dB:

$$n_8 = 10^{\frac{8}{20}} = 2{,}512\ ; \quad R_2 = 600 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}512}{2{,}512^2 - 1} = 567{,}7\Omega\ ; \quad \frac{R_1}{2} = 600 \cdot \frac{2{,}512 - 1}{2{,}512 + 1} = 258{,}3\Omega$$

Si può notare quanto sia breve e semplice il metodo di calcolo.
La Fig.09. mostra lo schema di realizzazione dell’attenuatore. Sono in evidenza i quattro deviatori (a due vie e due posizioni) che possono includere o escludere una o più cellule attenuatrici, per far si che si ottenga il numero di dB desiderato.

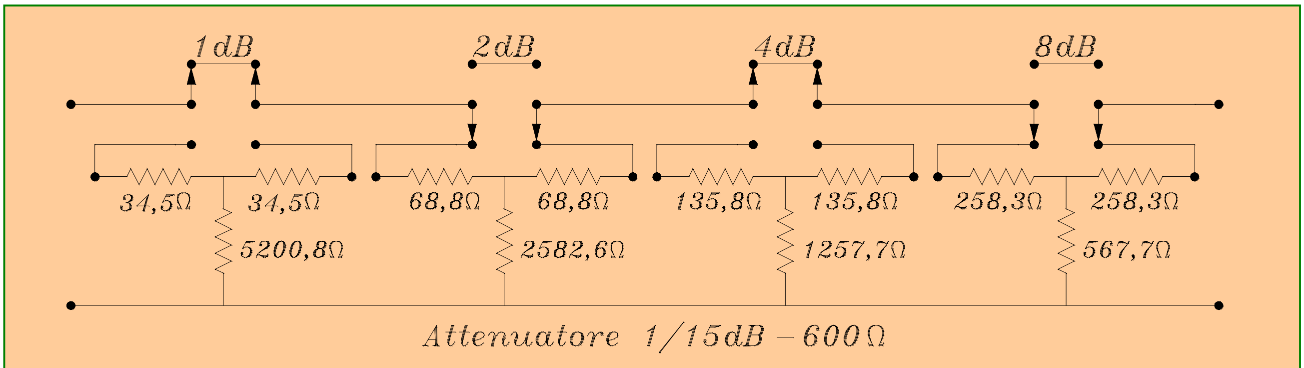
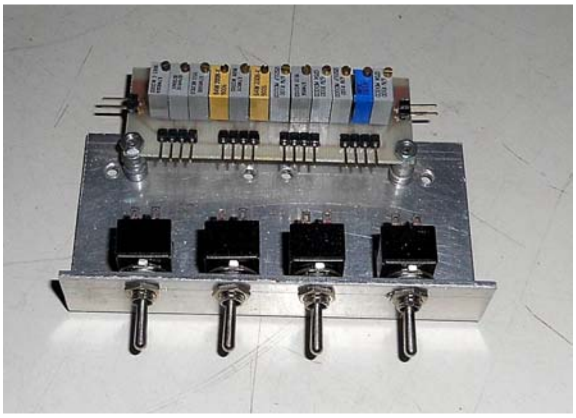
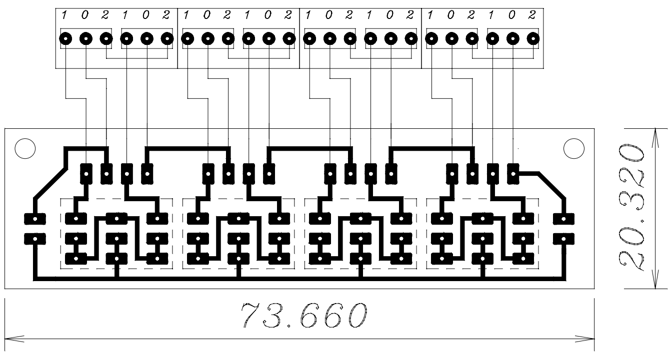


Fig.09

Nella fig.09 il circuito è disposto per attenuare di **10dB (2+8)** il segnale d’ingresso.
Nella fotografia vediamo l’attenuatore in fase di costruzione. Si può notare come siano stati adoperati i trimmer multigiri per una accurata taratura. Sono stati utilizzati i morsetti a spillo per i collegamenti con deviatori e con l’ingresso e l’uscita, per avere la possibilità di scambiare eventualmente la basetta con altre di diversa attenuazione. Si propone anche il circuito stampato con le dimensioni, dove sono chiari i suddetti collegamenti.



L’attenuatore in fase di realizzazione



Circuito stampato

----*----

Dopo aver fatto questa piccola esperienza di calcolo, possiamo trarre due importanti considerazioni:

1) Le relazioni che legano R_1 e R_2 a R_0 sono lineari con R_0.

Perciò i valori calcolati per 50Ω o per 600Ω, hanno le stesse cifre significative valide per 5, 500, 5000 ohm o per 6, 60, 6000 ohm, ecc. Basta moltiplicare o dividere le cifre significative per 10 o per 100 o per 1000, ecc. Ciò facilita molto il calcolo. Perciò, in base a quanto detto, se ci necessita un attenuatore con impedenza caratteristica $R_0 = 60\Omega$ dobbiamo porre, nel secondo esempio: R1/2 = 19.94ohm; R2 = 80.32ohm.

2) Il valore dell'attenuazione "n" deve essere sempre *maggiore di uno*, per rispettare la validità delle espressioni. Un valore di "n" minore di uno darebbe luogo a resistenze negative e, concettualmente, produrrebbe un'amplificazione **(attenuatori che amplificano!).**

Febbraio 2012

Nicola del Ciotto